

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH**1. Kiến thức cần nhớ**

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + by = c, a \neq 0 & (D) \\ a'x + b'y = c', a' \neq 0 & (D') \end{cases}$$

- $(D) \text{ cắt } (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- $(D) // (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.
- $(D) \equiv (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm.

2. Bài tập vận dụng

Bài tập 1: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x - my = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Giải hệ phương trình (1) khi $m = -1$.
- Tìm m để hệ (1) có nghiệm (x, y) thỏa: $x + y = 1$.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - my = 1 \end{cases} \quad (1)$$

- Giải hệ phương trình (1) khi $m = -7$.
- Xác định giá trị của m để: $x = -1$ và $y = 4$ là nghiệm của hệ (1).

Bài tập 3 : Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = m \end{cases} \quad (1)$$

- Giải hệ phương trình (1) khi $m = -1$.
- Tìm m để hệ (1) có nghiệm $(x; y)$ thỏa $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 3m + 1 \\ 3x + 2y = 2m - 3 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình khi $m = -1$.
- Với giá trị nào của m thì hệ pt có nghiệm $(x; y)$ thỏa $\begin{cases} x < 1 \\ y < 6 \end{cases}$.

II. VẼ ĐỒ THỊ & TÌM TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA (P): $y = ax^2$ VÀ (D): $y = ax + b$ ($a \neq 0$)**1. Kiến thức cần nhớ**

a. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$):



Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có những tính chất sau:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.



Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$):

- Là một Parabol (P) với đỉnh là gốc tọa độ 0 và nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành. 0 là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành. 0 là điểm cao nhất của đồ thị.



Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$):

- Lập bảng các giá trị tương ứng của (P).
- Dựa vào bảng giá trị $\rightarrow$ vẽ (P).

b. Tìm giao điểm của hai đồ thị : (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và (D): $y = ax + b$:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D): cho 2 vế phải của 2 hàm số bằng nhau $\rightarrow$ đưa về pt bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$.
- Giải pt hoành độ giao điểm:
 - + Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow$ pt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ (D) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
 - + Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow$ pt có nghiệm kép $\Rightarrow$ (D) và (P) tiếp xúc nhau.
 - + Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow$ pt vô nghiệm $\Rightarrow$ (D) và (P) không giao nhau.

c. Xác định số giao điểm của hai đồ thị : (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và (D_m) theo tham số m:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_m): cho 2 vế phải của 2 hàm số bằng nhau $\rightarrow$ đưa về pt bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$.
- Lập Δ (hoặc Δ') của pt hoành độ giao điểm.
- Biện luận:
 - + (D_m) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi $\Delta > 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm m.
 - + (D_m) tiếp xúc (P) tại 1 điểm $\Delta = 0 \rightarrow$ giải pt $\rightarrow$ tìm m.
 - + (D_m) và (P) không giao nhau khi $\Delta < 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm m.

2. Bài tập vận dụng

Bài tập 1: Cho hai hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ có đồ thị (P) và $y = -x + m$ có đồ thị (d).

1. Với $m = 4$, vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Xác định tọa độ các giao điểm của chúng.
2. Xác định giá trị của m để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài tập 2: Cho hai hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị (P) và $y = -3x + m$ có đồ thị (d).

1. Khi $m = 1$, vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Xác định tọa độ các giao điểm của chúng.
2. Xác định giá trị của m để (d) tiếp xúc (P). Xác định tọa độ tiếp điểm.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị (P).

1. Vẽ (P) trên một hệ trục tọa độ vuông góc..
2. Tìm điểm trên (P) các điểm có tổng hoành độ và tung độ của nó bằng -6 .

Bài tập 4: Cho hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và $y = -2x + \frac{1}{2}$ có đồ thị (d).

1. Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc.
2. Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (d).
3. Tìm tọa độ những điểm trên (P) thỏa tính chất tổng hoành độ và tung độ của điểm đó bằng -4 .

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$ có đồ thị (P) và $y = x + \frac{5}{3}$ có đồ thị (d).

1. Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc.
2. Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (d).

3. Gọi A là điểm $\in (P)$ và B là điểm $\in (d)$ sao cho $\begin{cases} x_A = x_B \\ 11y_A = 8y_B \end{cases}$.

Xác định tọa độ của A và B.

Bài tập 6: Cho (P): $y = x^2$ và (d): $y = -x + 2$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d), xác định tọa độ của A, B.
- Tính diện tích tam giác AOB (đơn vị đo trên trục số là cm).

III. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Kiến thức cần nhớ

a. Giải phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

a) Nhẩm nghiệm:

- $a + b + c = 0 \Rightarrow$ pt (1) có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.
- $a - b + c = 0 \Rightarrow$ pt (1) có 2 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

b) Giải với Δ' :

Nếu $b = 2b' \Rightarrow b' = \frac{b}{2} \Rightarrow \Delta' = (b')^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.
- Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) Giải với Δ :

Tính Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b. Hệ thức Vi ét và ứng dụng:

a) Định lý: Nếu x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Định lý đảo: Nếu $\begin{cases} u + v = S \\ u \cdot v = P \end{cases}$

$\Rightarrow u, v$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (ĐK: $S^2 - 4P \geq 0$).

2. Bài tập vận dụng

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; | b) $(2x + 1)^4 - 8(2x + 1)^2 - 9 = 0$ |
| c) $2x^3 - 7x^2 + 5x = 0$; | d) $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$; |

Bài tập 2 : Tính nhẩm nghiệm của phương trình:

a, $x^2 - 7x + 12 = 0$

b, $3x^2 - 7x + 4 = 0$

c, $7x^2 - 5x - 12 = 0$

Bài tập 3 : Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $4x^2 + 5x - 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1); \quad B = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}; \quad D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$$

Bài tập 4. Cho phương trình $x^2 - (m + 4)x + 3m + 3 = 0$

a, Tìm m để phương trình có 1 nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại của phương trình.

b, Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \geq 0$

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$

1, Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)

2, Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm).

3, Tìm m để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

4, Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - x_2 = -2$.

5, Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 6: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m - 3)x - 2m = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.

2. CMR: Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

3. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Bài tập 7: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

3. Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Bài tập 8 : Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

3. Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt. Thiết lập hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

Bài tập 9 : Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) khi $m = 5$.

2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

3. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

Bài tập 10 : Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$ (1).

1. Tìm m để:

a) Pt (1) có 2 nghiệm phân biệt.

b) Pt (1) có một nghiệm là -2.

2. Giả sử x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1). CMR: $(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) + 4 = 0$.

Bài tập 11 :

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.

2. CMR: $\forall m$, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt (1). Chứng minh biểu thức:

$A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m.

Bài tập 12: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m + 1)x + (2m - 4) = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.
2. CMR: Với mọi m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Tính $A = x_1^2 + x_2^2$ theo m .
4. Tìm giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 13: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m - 1)x + 2m - 7 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
2. CMR: Với mọi m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
3. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.
4. Thiết lập mối quan hệ giữa 2 nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc và m .
5. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Bài tập 14: Cho phương trình bậc hai $x^2 + 2x + 4m + 1 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để:
 - a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
 - b) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
 - c) Tổng bình phương các nghiệm của pt (1) bằng 11.

Bài tập 15: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ (m là tham số) (1).

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép và tính nghiệm kép đó.

IV. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài tập 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số bằng chữ số hàng chục vào bên phải thì được một số lớn hơn số ban đầu là 682.

Bài tập 2: Có hai số tự nhiên, biết rằng: tổng của hai số bằng 59; hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7. Tìm hai số đó.

Bài tập 3: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng của hai chữ số của nó bằng 10; tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

Bài tập 4: Hình chữ nhật có chu vi là 280m. Nếu giảm chiều dài của hình chữ nhật 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích của nó tăng thêm $144m^2$. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

Bài tập 5: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 320m. Nếu chiều dài của khu vườn tăng 10m và chiều rộng giảm 5m thì diện tích của nó tăng thêm $50m^2$. Tính diện tích của khu vườn ban đầu.

Bài tập 6: Một hình chữ nhật có chu vi 160cm và có diện tích $1500m^2$. Tính các kích thước của nó.

Bài tập 7: Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là 340m. Ba lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20m. Tính diện tích của sân trường.

Bài tập 8: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

Bài tập 9: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn chưa có nước thì sau 18 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể chậm hơn vòi thứ hai 27 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?

Bài tập 10: Một xe khách và một xe du lịch khởi hành cùng một lúc từ thành phố Hồ Chí Minh đi Tền Giang. Xe du lịch có vận tốc lớn hơn xe khách 20km/h, do đó xe du lịch đến nơi trước xe khách 25 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết khoảng cách giữa thành phố Hồ Chí Minh và Tền Giang là 100 km.

Bài tập 11: Khoảng cách giữa 2 bến sông A và B là 30km. Một ca nô đi từ A đến B, nghỉ 40 phút ở B, rồi lại trở về A. thời gian kể từ lúc đi đến lúc trở về A là 6 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc dòng nước là 3km/h

Bài tập 12: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Bài tập 13: Một phòng họp có 240 ghế được xếp thành các dãy có số ghế bằng nhau. Nếu mỗi dãy bớt đi một ghế thì phải xếp thêm 20 dãy mới hết số ghế. Hỏi phòng họp lúc đầu được xếp thành bao nhiêu dãy ghế.

Bài tập 14: Hai đội thủy lợi cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 ngày. Nếu hai đội cùng làm thì công việc hoàn thành trong 6 ngày. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

Bài tập 15: Theo kế hoạch, một xí nghiệp phải làm 400 dụng cụ trong một thời gian nhất định. Do mỗi giờ làm tăng 20 dụng cụ nên thời gian hoàn thành công việc giảm một giờ. Tính thời gian xí nghiệp phải làm số dụng cụ đó theo kế hoạch?

Bài tập 16: Một ô tô đi từ Hải Phòng về Hà Nội, đường dài 100km. Người lái xe tính rằng nếu tăng vận tốc thêm 10km/h thì về đến Hà Nội sớm nửa giờ. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Bài tập 17: Một ca nô chạy trên sông trong 8h, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó ca nô này chạy trong 4h, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc xuôi và ngược dòng biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô là không đổi.

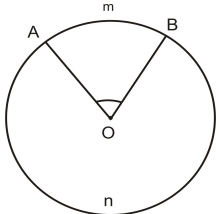
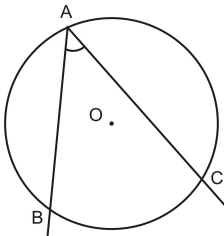
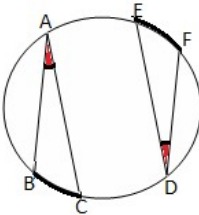
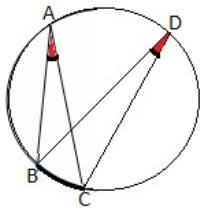
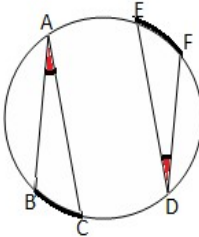
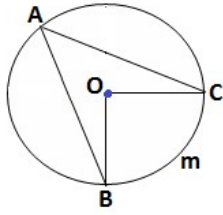
Bài tập 18: Một chiếc thuyền xuôi dòng, ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4 giờ 30 phút. Biết thời gian xuôi dòng 5km bằng thời gian ngược dòng 4km. Tính vận tốc dòng nước?

Bài tập 19: Hai ca nô đi ngược chiều nhau và khởi hành cùng lúc trên dòng sông dài 85km. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô ngược dòng là 9km/h, và vận tốc dòng nước là 3km/h.

Bài tập 20: Một ca nô xuôi dòng 30 km rồi ngược dòng 36 km. Vận tốc ca nô xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô ngược dòng 3 km/h. Tính vận tốc ca nô lúc ngược dòng. Biết thời gian ca nô lúc ngược dòng lâu hơn thời gian xuôi dòng là 1 giờ.

CHỦ ĐỀ : HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa – Định lý Hệ quả	Ký hiệu toán học	Hình vẽ
1. Góc ở tâm: Trong một đường tròn, số đo của góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn.	(O,R) có: $\widehat{AOB}$ ở tâm chắn $\widehat{AmB}$ $\Rightarrow \widehat{AOB} = sđ \widehat{AmB}$	
2. Góc nội tiếp: * <u>Định lý:</u> Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. * <u>Hệ quả:</u> Trong một đường tròn: a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.	(O,R) có: $\widehat{BAC}$ nội tiếp chắn $\widehat{BC}$ $\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{BC}$. a) (O,R) có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{BC} \\ \widehat{EDF} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{EF} \\ \widehat{BAC} = \widehat{EDF} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{EF}$	 
b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.	b) (O,R) có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{BC} \\ \widehat{BDC} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (O,R) có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{BC} \\ \widehat{EDF} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{EF} \\ \widehat{BC} = \widehat{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EDF}$	 
c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.	c) (O,R) có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \widehat{BC} \\ \widehat{BOC} \text{ ở tâm chắn } \widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$	

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung:

* Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

* Hệ quả: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn:

* Định lý: Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

5. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn:

* Định lý: Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

6. Cung chứa góc:

* Tập hợp các điểm cùng nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc α không đổi là hai cung tròn chứa góc α .

d) (O,R) có:

$\widehat{BAC}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

(O,R) có:

$\widehat{BAx}$ tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$.

(O,R) có:

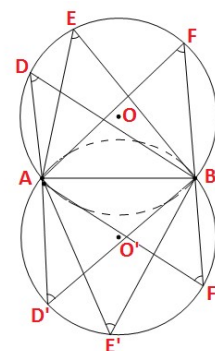
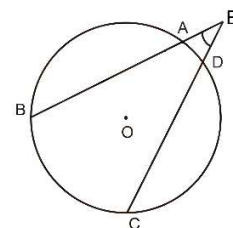
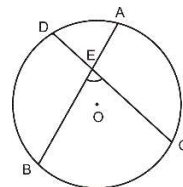
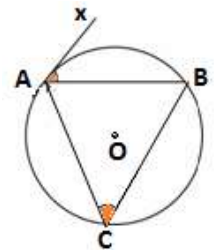
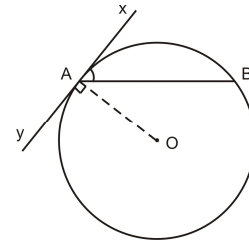
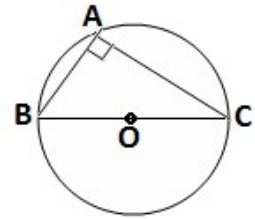
$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAx} \text{ tạo bởi tt \& dc chắn } \widehat{AB} \\ \widehat{ACB} \text{ nội tiếp chắn } \widehat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{ACB}$

(O,R) có:

$\widehat{BEC}$ có đỉnh bên trong đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{BEC} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{BC} + sđ \widehat{AD})$

(O,R) có:

$\widehat{BEC}$ có đỉnh bên ngoài đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{BEC} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{BC} - sđ \widehat{AD})$



*** Đặc biệt:**

a) Các điểm D, E, F cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB , cùng nhìn đoạn AB dưới một góc không đổi $\Rightarrow$ Các điểm A, B, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Các điểm C, D, E, F cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông $\Rightarrow$ Các điểm A, B, C, D, E, F thuộc đường tròn đường kính AB .

7. Tứ giác nội tiếp:

*** Định nghĩa:** Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.

*** Định lý:** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

*** Định lý đảo:** Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

8. Độ dài đường tròn, cung tròn:

*** Chu vi đường tròn:**

*** Độ dài cung tròn:**

a) $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \alpha$ cùng nhìn đoạn $AB \Rightarrow A, B, D, E, F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$ cùng nhìn đoạn $AB \Rightarrow A, B, C, D, E, F$ thuộc một đường tròn đường kính AB .

*** Tứ giác $ABCD$ có $A, B, C, D \in (O) \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp (O) .**

*** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{cases}$$

*** Tứ giác $ABCD$ có:**

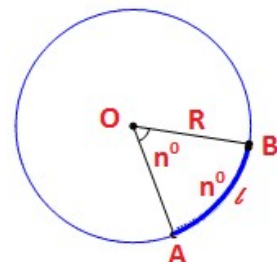
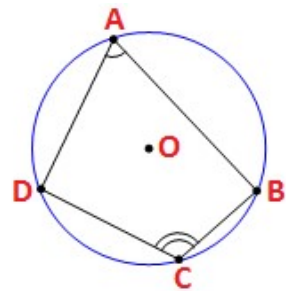
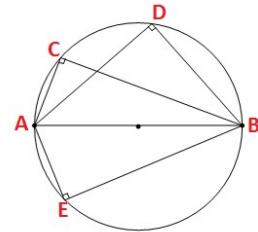
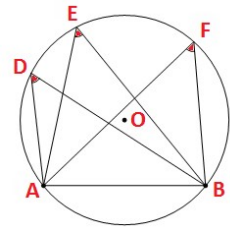
$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác n.tiếp

Hoặc:

$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác n.tiếp

$$C = 2\pi R = \pi d$$

$$\ell = \frac{\pi R n}{180^\circ}$$



9. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn:

* Diện tích hình tròn:

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

* Diện tích hình quạt tròn:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

* Diện tích hình viên phân:

$$S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt}} - S_{\text{ABC}}$$

* Diện tích hình vành khăn:

$$S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$$

HÌNH KHÔNG GIAN

1. Hình trụ:

* Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2\pi Rh$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{\text{đáy}}$$

* Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

* Thể tích:

$$V = S \cdot h = \pi R^2 h$$

S : diện tích đáy; h : chiều cao

2. Hình nón:

* Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \pi R \ell$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}}$$

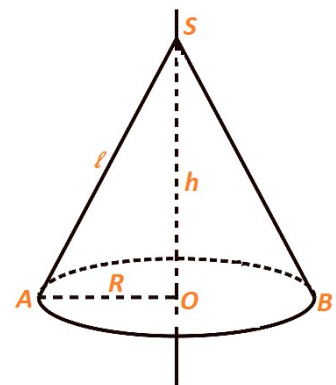
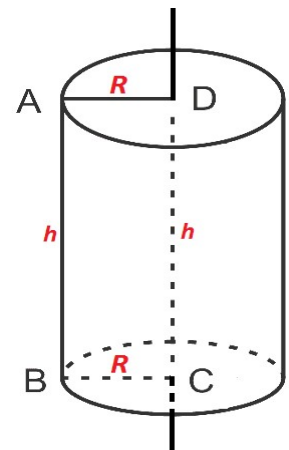
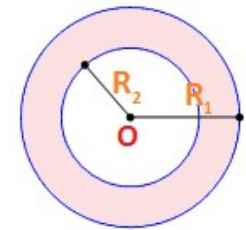
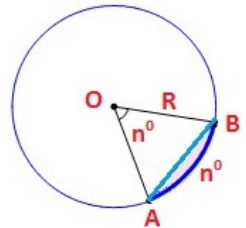
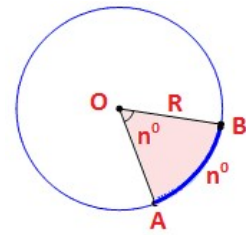
* Diện tích toàn phần:

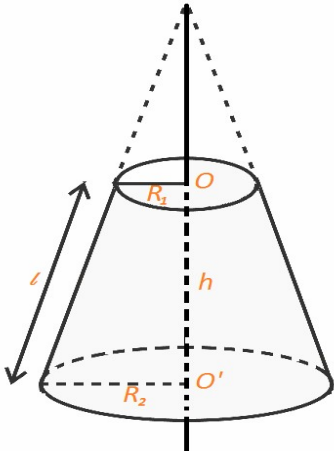
$$S_{tp} = \pi R \ell + \pi R^2$$

* Thể tích:

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} V_{\text{trụ}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



2. Hình nón cụt: * <u>Diện tích xung quanh:</u> * <u>Diện tích toàn phần:</u> * <u>Thể tích:</u>	S: diện tích đáy; h: chiều cao, l: đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2}$ $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l$ $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy lớn}} + S_{\text{đáy nhỏ}}$ $S_{tp} = \pi(R_1 + R_2)l + \pi(R_1^2 + R_2^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$	
---	--	---

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.. Các phân giác của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường tròn tại E, F.

- CMR: $OF \perp AB$ và $OE \perp AC$.
- Gọi M là giao điểm của của OF và AB; N là giao điểm của OE và AC. CMR: Tứ giác AMON nội tiếp và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác này.
- Gọi I là giao điểm của BE và CF; D là điểm đối xứng của I qua BC. CMR: $ID \perp MN$.
- CMR: Nếu D nằm trên (O) thì $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh BC và N là điểm trên cạnh CD sao cho $BM = CN$. Các đoạn thẳng AM và BN cắt nhau tại H.

- CMR: Các tứ giác AHND và MHNC là những tứ giác nội tiếp.
- Khi $BM = \frac{a}{4}$. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHND theo a.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN theo a.

Bài 3: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Đường cao BH và CK lần lượt cắt (O) tại E và F.

- CMR: Tứ giác BKHC nội tiếp.
- CMR: $OA \perp EF$ và $EF \parallel HK$.

c) Khi $\triangle ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng a . Tính diện tích hình viên phân chắn cung nhỏ BC của (O).

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a . Gọi E là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với tia DE tại H, đường thẳng này cắt tia DC tại F.

a) CMR: Năm điểm A, B, H, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) CMR: $DE \cdot HE = BE \cdot CE$.

c) Tính độ dài đoạn thẳng DH theo a khi E là trung điểm của BC.

d) CMR: HC là tia phân giác của $\widehat{DHF}$.

Bài 5: Một hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn Tâm O bán kính R . Một điểm M di động trên cung ABC, M không trùng với A, B và C, MD cắt AC tại H.

a) CMR: Tứ giác MBOH nội tiếp được trong đường tròn và $DH \cdot DM = 2R^2$.

b) CMR: $MD \cdot MH = MA \cdot MC$.

c) $\triangle MDC$ và $\triangle MAH$ bằng nhau khi M ở một vị trí đặc biệt M' . Xác định điểm M' . Khi đó $M'D$ cắt AC tại H' . Đường thẳng qua M' và vuông góc với AC cắt AC tại I. Chứng minh rằng I là trung điểm của $H'C$.

Bài 6: Cho hai đường tròn (O; 20cm) và (O'; 15cm) cắt nhau tại A và B. Biết $AB = 24\text{cm}$ và O và O' nằm về hai phía so với dây chung AB. Vẽ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O').

a) CMR: Ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Tính độ dài đoạn OO' .

c) Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') (E, F là các tiếp điểm). CMR: Đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

Bài 7: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại C và D.

1. CMR:

a) Tứ giác AOMC nội tiếp.

b) $CD = CA + DB$ và $\widehat{COD} = 90^\circ$.

c) $AC \cdot BD = R^2$.

2. Khi $\widehat{BAM} = 60^\circ$. Chứng tỏ $\triangle BDM$ là tam giác đều và tính diện tích của hình quạt tròn chắn cung MB của nửa đường tròn đã cho theo R.

Bài 8: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (O), ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D.

a) CMR: $MA^2 = MC \cdot MD$.

b) Gọi I là trung điểm của CD. CMR: 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO. CMR: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). CMR: 3 điểm A, B, K thẳng hàng.

Bài 9:

Cho hình vuông cạnh a, lấy điểm M bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B,C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại H, kéo dài BH cắt đường thẳng DC tại K.

a) Chứng minh: BHCD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $KM \perp DB$.

c) Chứng minh: $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.

Bài 10: Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O, R). Gọi AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (B và C là hai tiếp điểm). Từ A vẽ một tia cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F).

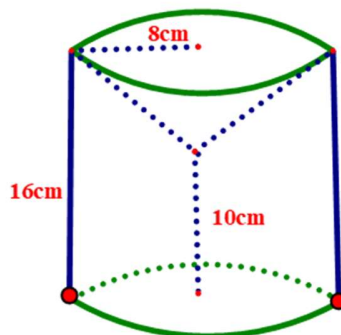
a) CMR: $\triangle AEC$ và $\triangle ACF$ đồng dạng. Suy ra $AC^2 = AE \cdot AF$.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 5 điểm A, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.

c) Từ E vẽ đường thẳng vuông góc với OB cắt BC tại M. Chứng minh tứ giác EMIC nội tiếp được trong đường tròn. Suy ra tứ giác MIFB là hình thang.

d) Giả sử cho $OA = R\sqrt{2}$. Tính theo R phần diện tích tứ giác ABOC nằm ở ngoài hình tròn (O)

Bài 11: Người ta muốn tạo một cái khuôn đúc dạng hình trụ, có chiều cao bằng 16 cm, bán kính đáy bằng 8cm, mặt đáy trên lõm xuống dạng hình nón và khoảng cách từ đỉnh hình nón đến mặt đáy dưới hình trụ bằng 10cm (như hình vẽ bên). Tính diện tích toàn bộ mặt khuôn (lấy)



Bài 12: Hộp sữa Ông Thọ là một hình trụ có chiều cao 8cm và bán kính đường tròn đáy bằng 3,8cm. Tính thể tích hộp sữa (lấy $\pi \approx 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 13: Chiếc nón lá (hình bên) có dạng hình nón. Biết khoảng cách từ đỉnh của nón đến một đỉnh trên vành nón là 30 cm, đường kính của vành nón là 40cm. Tính diện tích xung quanh của chiếc nón đó



Bài 14: Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ, chiều cao bằng 10cm và chứa một lượng nước có thể tích bằng một nửa thể tích của chiếc cốc. Một chiếc cốc thủy tinh khác có dạng hình nón (không chứa gì cả) và có bán kính đáy bằng bán kính đáy chiếc cốc hình trụ đã cho (hình vẽ bên). Biết rằng khi đổ hết lượng nước trong hình trụ vào chiếc cốc hình nón thì chiếc cốc hình nón đầy nước và không có nước tràn ra ngoài. Tính chiều cao của chiếc cốc có dạng hình nón (bỏ qua bề dày của thành cốc và đáy cốc).

